

Szerkezetek numerikus modellezése az építőmérnöki gyakorlatban

Kovács Imre

*intézetigazgató –helyettes, tanszékvezető, főiskolai docens
a Magyar Építész Kamara tagja, a Magyar Mérnöki Kamara tagja
a *fib* Nemzetközi Betonszövetség Magyar Tagozatának tagja
az Építéstudományi Egyesület Debreceni Csoportjának titkára*

Az előadás felépítése

- Építőmérnöki tevékenység és feladatkörei
- Mérnöki modellalkotás szintjei
- Modell kísérlettől a VEM-ig
- Differenciálegyenletek alkalmazása rúdszerkezetek stabilitásvizsgálatában
- Véges differenciák módszere és alkalmazása lineárisan változó intenzitású normálerővel terhelt konzol esetében
- VEM mint a tartószerkezeti tervezés mindennapi eszköze
- Összefoglalás

Építőmérnöki tevékenység

Szerkezetépítés

magasépítés,
mélyépítés

Közlekedésépítés

út- és
vasútépítés

Közműépítés

vízellátás,
csatornázás,
szennyvisztisztítás,
vízépítés

Geotechnika

speciális alapozások,
földalatti műtárgyak,
alagutak

Geodézia

általános és ipari
geodézia,
térinformatika

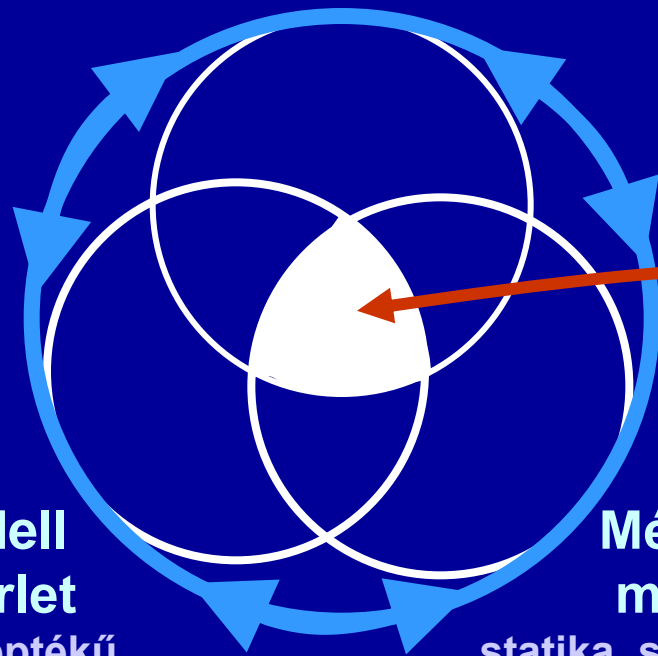
Szerkezetépítési feladatok



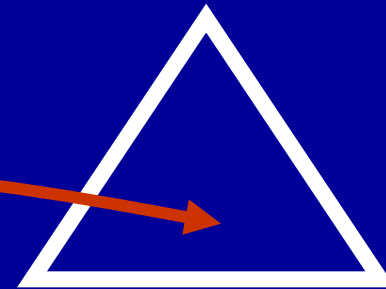
Modellalkotás szintjei

Numerikus szimuláció
lineáris, nem lineáris vizsgálat

Anyagjellemzők
homogén, inhomogén, izotróp, anizotróp
lineárisan rugalmas, nem lineárisan rugalmas,
képlékeny, viszkózus, reológiai jellemzők



**Szerkezeti
viselkedés**



Környezet
terhek, hatások,
tartóssági kérdések

Mérethatás
„size effect”

**Modell
kísérlet**

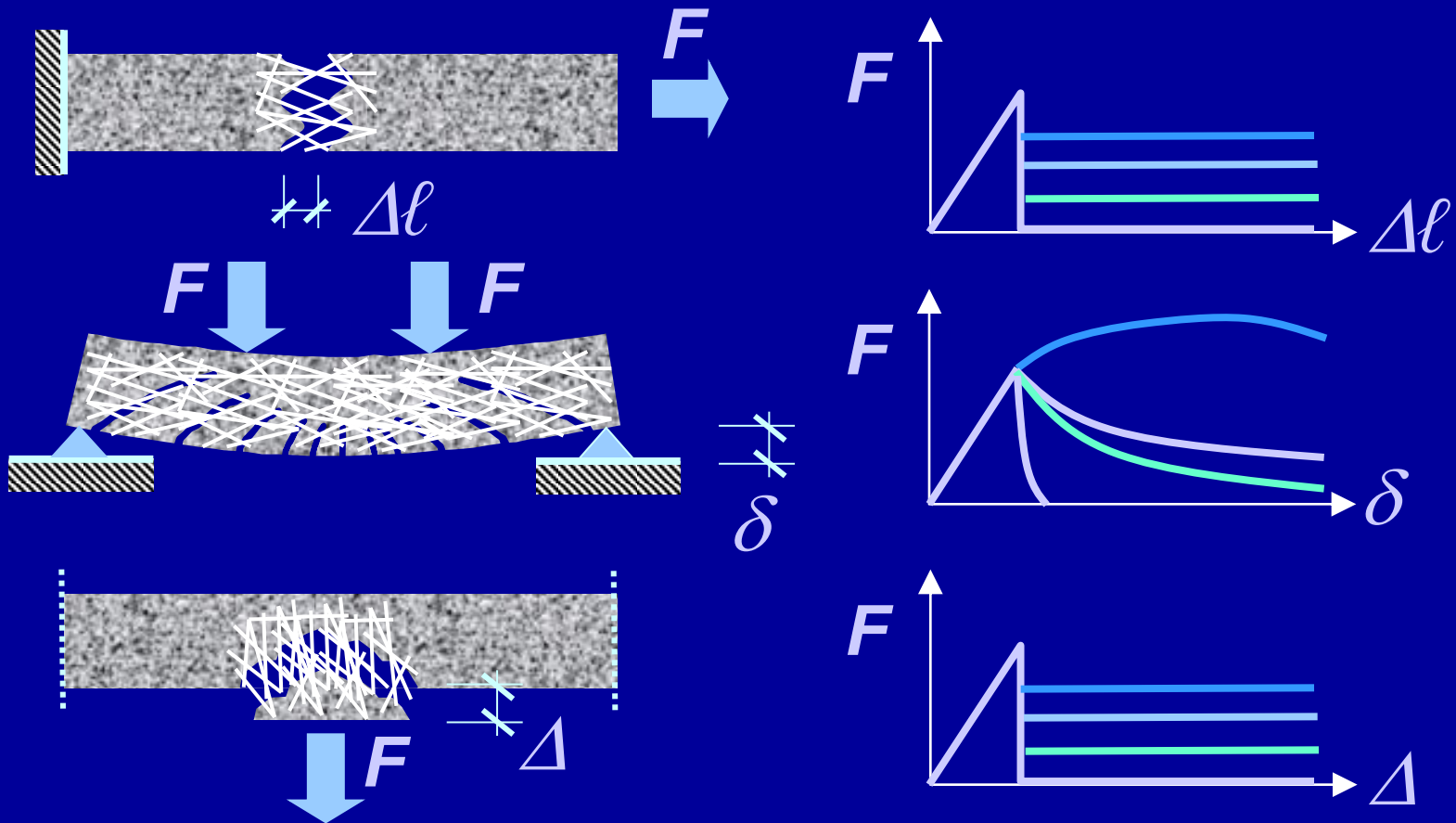
valós léptékű
nem valós léptékű

**Mérnöki
modell**

statika, szilárdságtan,
rugalmasságtan, dinamika

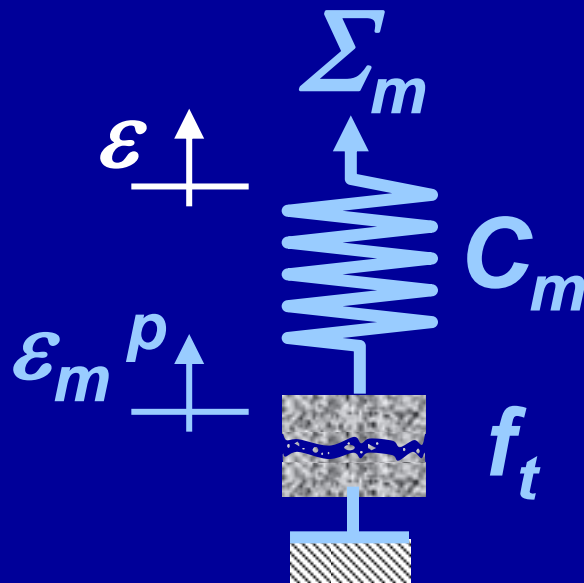
Modell kísérlet

Jelenség és tapasztalat



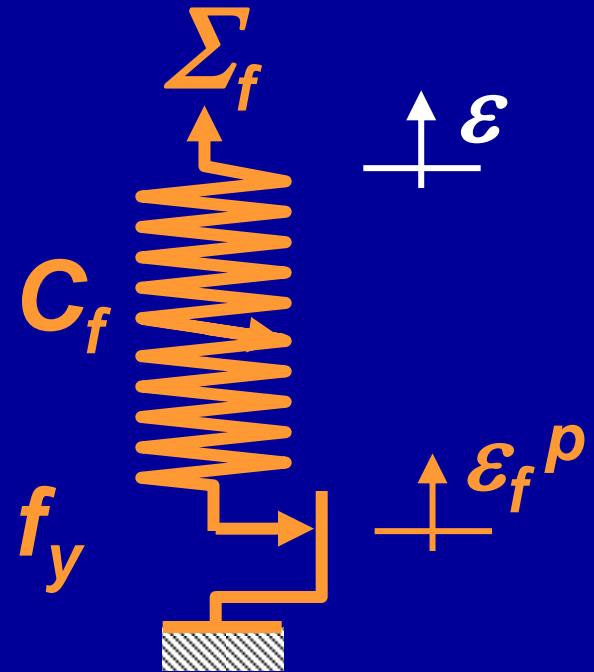
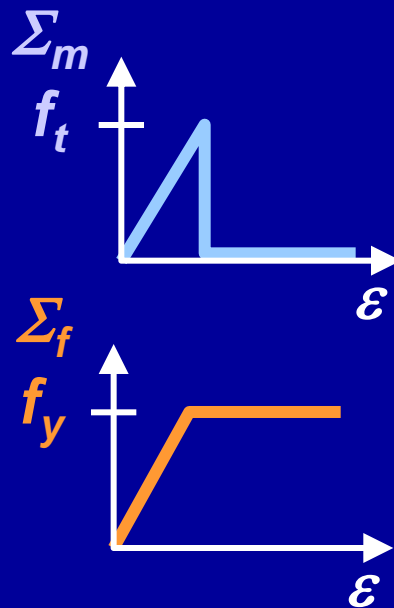
Mérnöki modell I.

Kompozit anyag alkotóelem viselkedéseinek modelljei



Beton (Mátrix)

Lineárisan rugalmas – tökéletesen rideg anyag

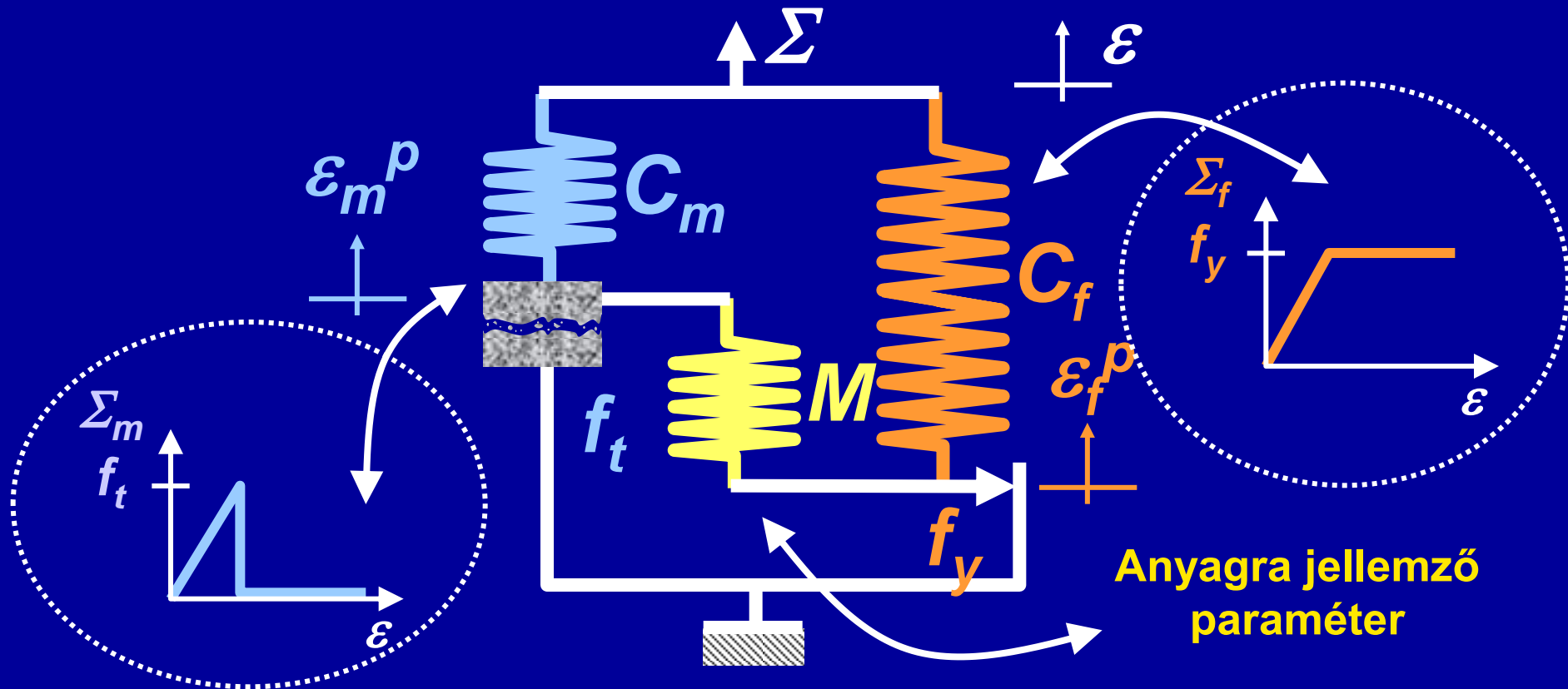


Acélszálak (Szálerősítés)

Lineárisan rugalmas – tökéletesen képlékeny anyag

Mérnöki modell II.

Kompozit anyag mechanikai modellje az alkotóelemek viselkedésével



MéRNÖKI modell III.

Kompozit anyag makroszkopikus és parciális feszültségeinek függvényei a mechanikai modell erőfolyama alapján

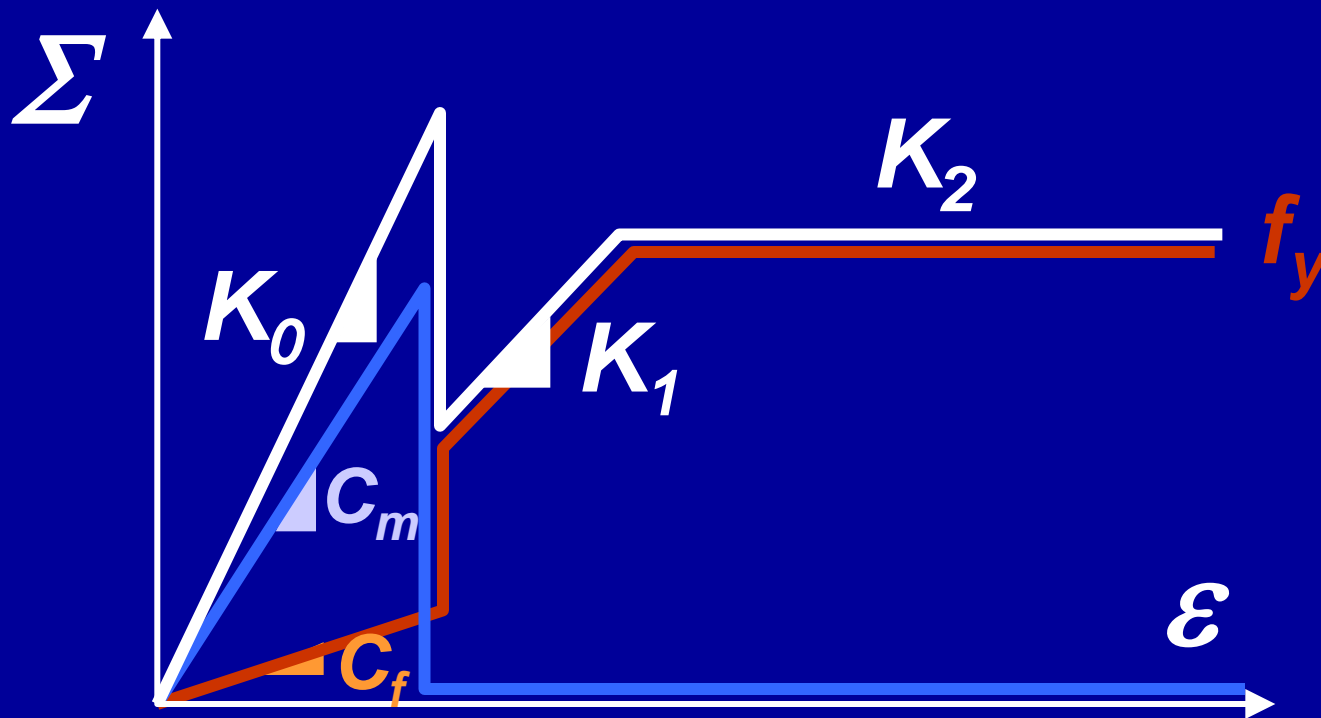
$$\sigma_m = C_m (\varepsilon - \varepsilon_m^p) - M (\varepsilon_m^p - \varepsilon_f^p)$$

$$\sigma_f = C_f (\varepsilon - \varepsilon_f^p) + M (\varepsilon_m^p - \varepsilon_f^p)$$

$$\Sigma = C_m (\varepsilon - \varepsilon_m^p) + C_f (\varepsilon - \varepsilon_f^p)$$

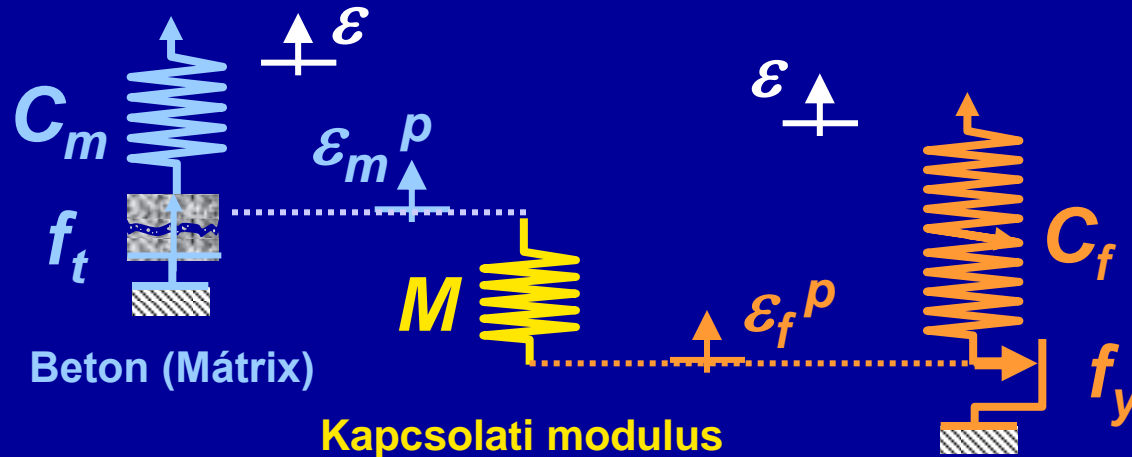
Mérnöki modell IV.

Kompozit anyag makroszkopikus és parciális feszültségeinek függvényei a mechanikai modell erőfolyama alapján



1-D Termodinamika

Az általánosított (3-D) anyagmodell termodinamikai, energetikai alapja



Helmholtz féle energiafüggvény:

Acélszálak (Szálerősítés)

$$\Psi = \frac{1}{2} C_m (\varepsilon - \varepsilon_m^p)^2 + \frac{1}{2} M (\varepsilon_m^p - \varepsilon_f^p)^2 + \frac{1}{2} C_f (\varepsilon - \varepsilon_f^p)^2$$

Clausius-Duhem egyenlőtlenség:

$$\varphi dt = \Sigma d\varepsilon - d\Psi \geq 0 \quad \rightarrow \quad \varphi dt = \sigma_m d\varepsilon_m^p + \sigma_f d\varepsilon_f^p$$

1-D Termodinamika

Az M kapcsolati modulust a Maxwell szimmetria definiálja

$$C_m + C_f = \frac{\partial \Sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon^2}$$

$$C_m = \frac{\partial \Sigma}{\partial \varepsilon_m^p} = \frac{\partial \sigma_m}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon_m^p}$$

$$C_f = \frac{\partial \Sigma}{\partial \varepsilon_f^p} = \frac{\partial \sigma_f}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon_f^p}$$

$$M = \frac{\partial \sigma_m}{\partial \varepsilon_f^p} = \frac{\partial \sigma_f}{\partial \varepsilon_m^p} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_m^p \partial \varepsilon_f^p}$$

3-D Termodinamika → VEM

A termodinamikai, energetikai módszer segítségével az 1-D modell skalár paraméterei az általánosított 3-D modellben azok tenzoriális megfelelőivel azonosítjuk

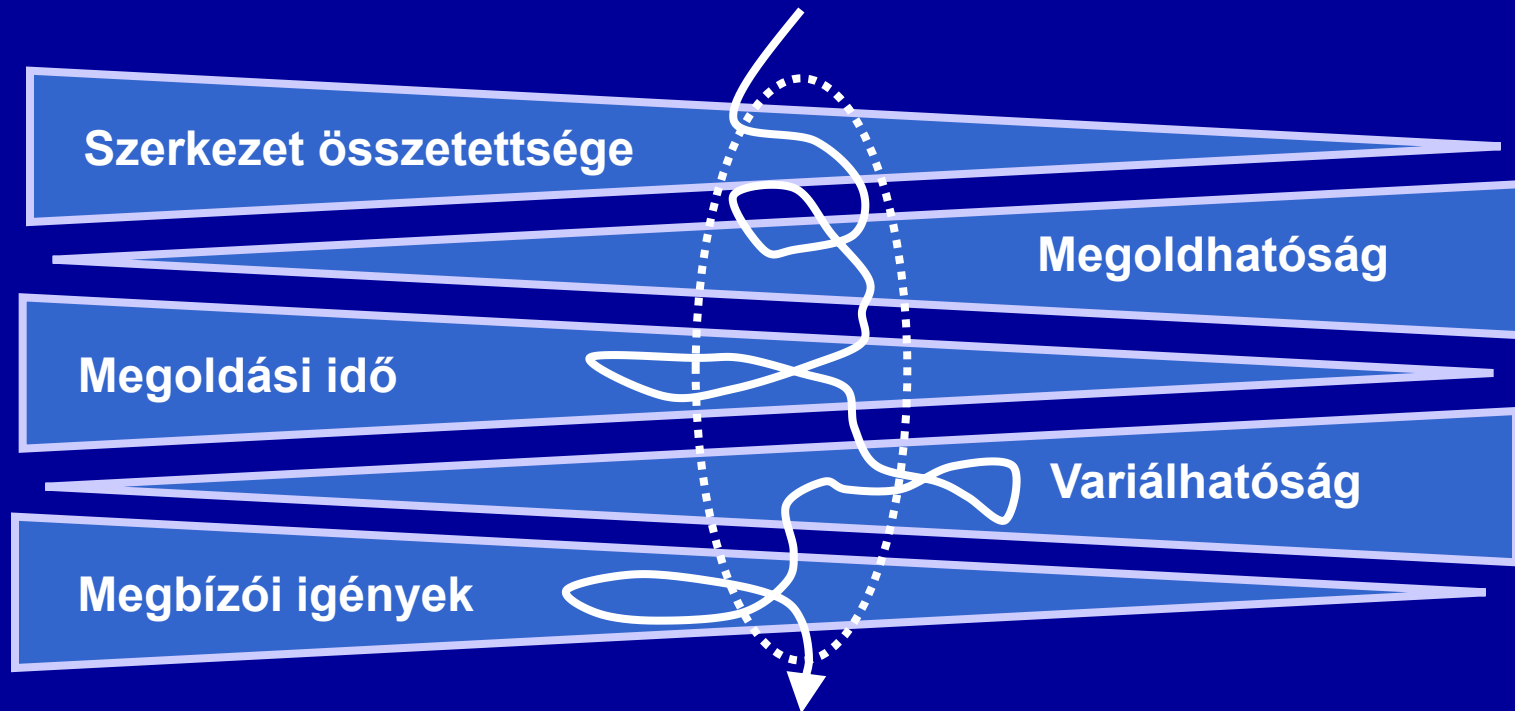
$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_m + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_f \right) \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_m \underline{\underline{\varepsilon}}^p_m - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_f \underline{\underline{\varepsilon}}^p_f$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_m = - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^p_m} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_m \underline{\underline{\varepsilon}} - \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_m + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_m \right) \underline{\underline{\varepsilon}}^p_m + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_m \underline{\underline{\varepsilon}}^p_f$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_f = - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^p_f} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_f \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_m \underline{\underline{\varepsilon}}^p_m - \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_f + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_f \right) \underline{\underline{\varepsilon}}^p_f$$

Problémamegoldás

Optimális, azaz gazdaságos megoldás keresése



Numerikus módszerek alkalmazása

Megoldási módszerek

Differenciálegyenletek

- ◀ csak speciális területeken alkalmazott
- ◀ a numerikus megoldások sem kellően pontosak
- ◀ „állatorvosi ló” típusú feladatokra alkalmazható

Véges differenciák módszere

- ◀ felületszerkezetek esetén használható, korlátok között
- ◀ a gyakorlati feladatok szintjén pontosnak tekinthető
- ◀ egyedi problémákra alkalmas
- ◀ nagy munkaigénnyel ad megoldást

VEM

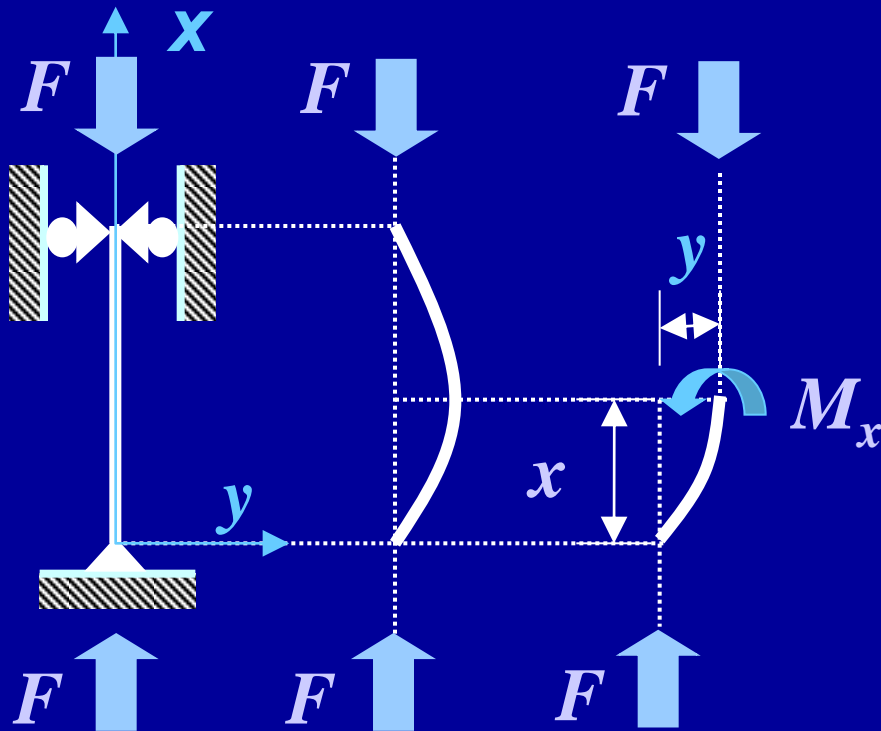
- ◀ általános érvényű módszer
- ◀ a pontosság az elemszám és az elemtulajdonságok függvénye

Probléma
összetettsége

Megoldási
idő

Differenciálegyenlet I.

Mindkét végén csuklósan megtámasztott síkbeli nyomott rúd kihajlása



$$M_x = -EIy''$$

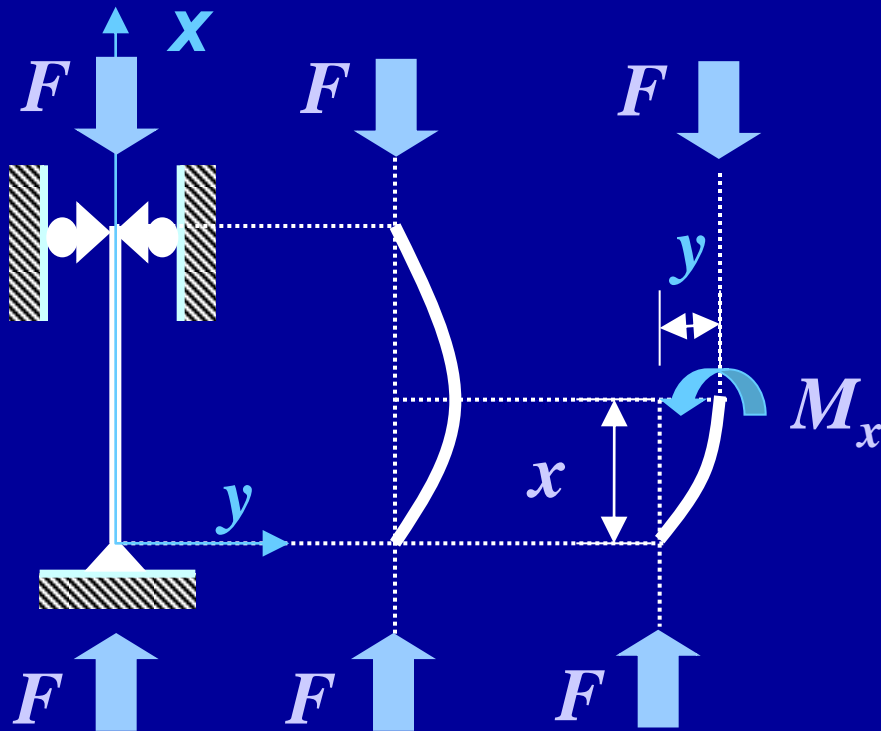
$$EIy'' + Fy = 0$$

$$k^2 = \frac{F}{EI}$$

$$y'' + k^2 y = 0$$

Differenciálegyenlet II.

Mindkét végén csuklósan megtámasztott síkbeli nyomott rúd kihajlása



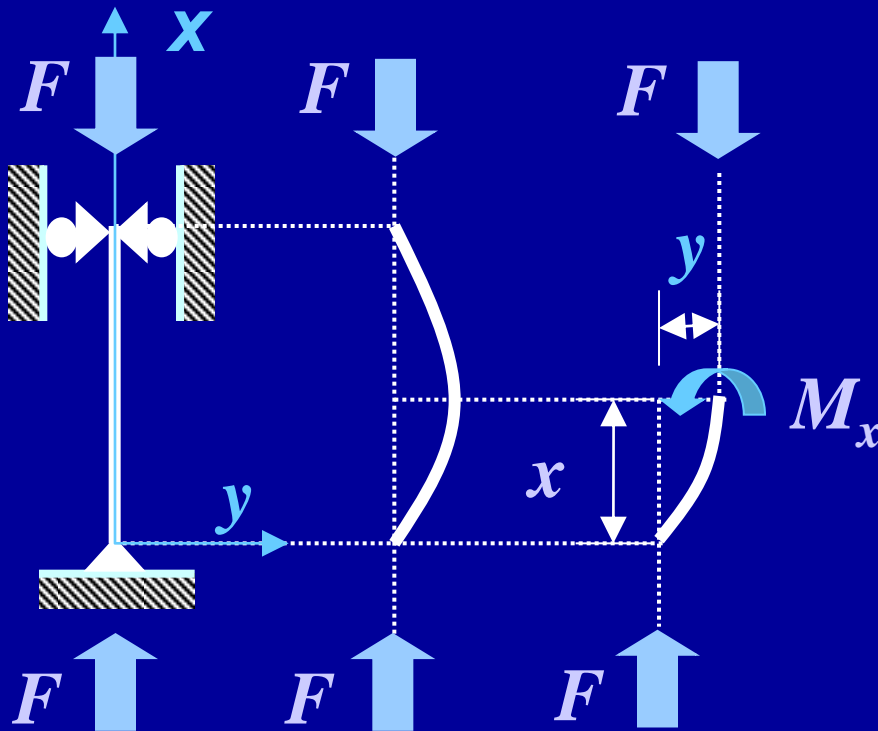
$$y = Ke^{mx}$$

$$y' = mKe^{mx}$$

$$y'' = m^2 Ke^{mx}$$

Differenciálegyenlet III.

Mindkét végén csuklósan megtámasztott síkbeli nyomott rúd kihajlása



$$y'' + k^2 y = 0$$

$$Ke^{mx} (m^2 + k^2) = 0$$

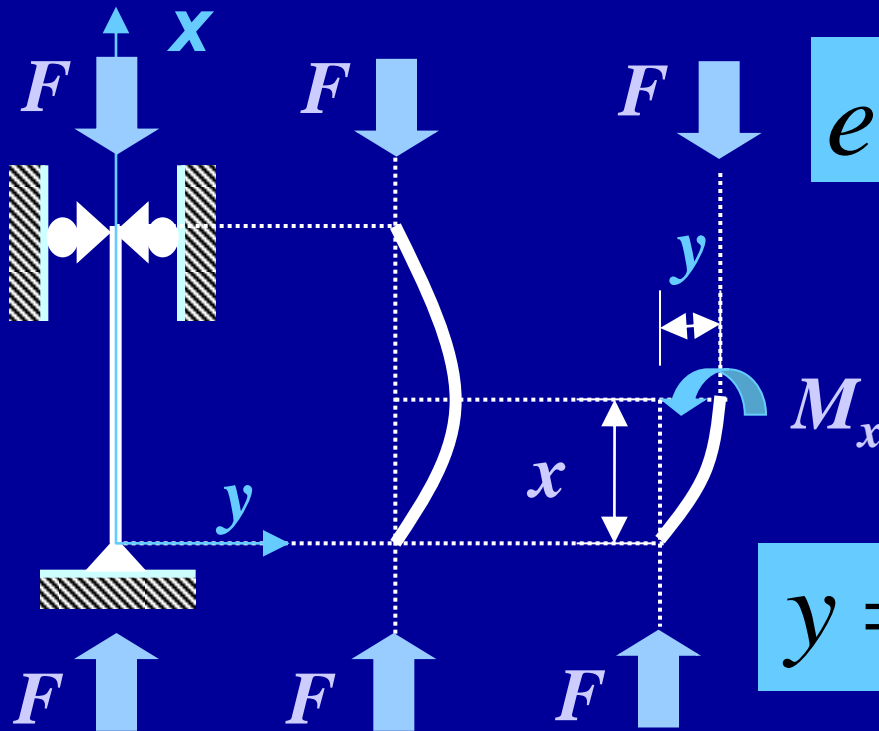
$$m = \pm ik$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$y = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$$

Differenciálegyenlet IV.

Mindkét végén csuklósan megtámasztott síkbeli nyomott rúd kihajlása



$$e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$$

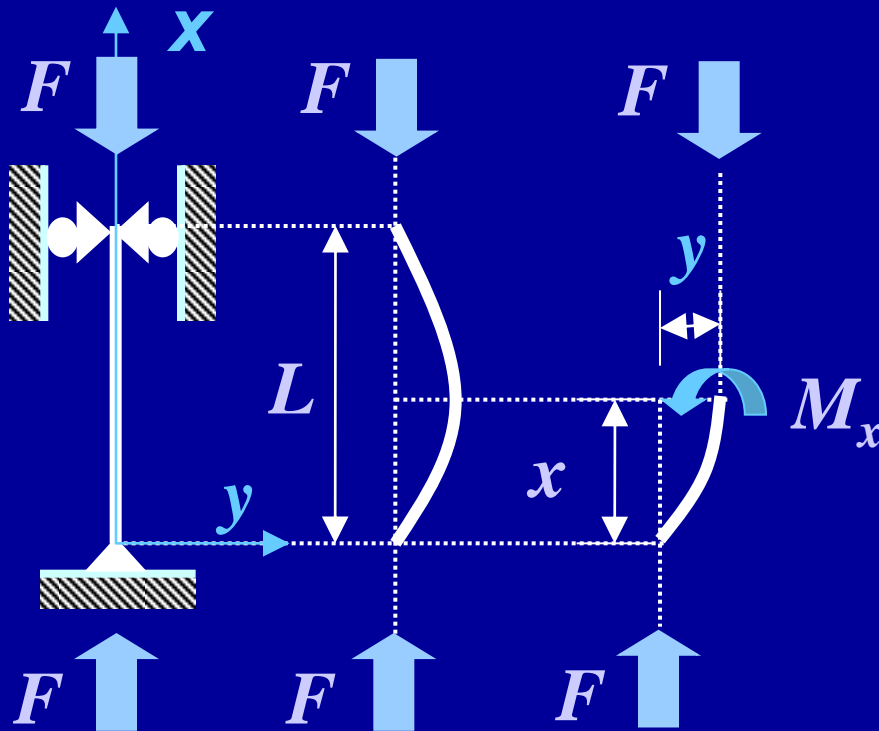
$$A = iC_1 - iC_2$$

$$B = C_1 + C_2$$

$$y = A \sin kx + B \cos kx$$

Differenciálegyenlet V.

Mindkét végén csuklósan megtámasztott síkbeli nyomott rúd kihajlása



1. Kerületi feltétel:

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 0$$

$$B = 0 \quad y = A \sin kx$$

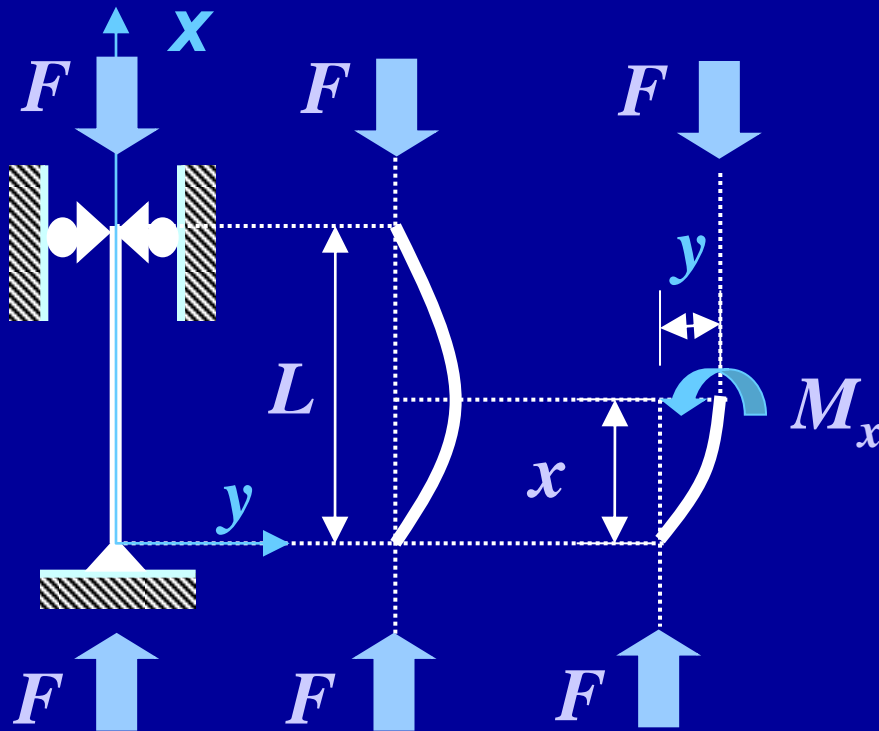
2. Kerületi feltétel:

$$x_L = L \quad y_L = 0$$

$$A \sin kL = 0$$

Differenciálegyenlet VI.

Mindkét végén csuklósan megtámasztott síkbeli nyomott rúd kihajlása



Megoldások:

a) $A = 0$

akkor k és F bármilyen értékű lehet a rúd egyenes marad (triviális meg.)

b) $\sin kL = 0$

$$F_{krit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Véges differenciák módszere I.

Az ismeretlen függvénynek csak egyes előirt pontokban felvett értékeit határozzuk meg, közelítően.

Ezen értékekből a differenciálegyenletben szereplő differenciálhányadosokat differenciahányadosokkal közelítjük.

Keressünk közelítő összefüggést az f függvény egyik kitüntetett pontjában.

A pontok távolsága dx . A függvényértéket Taylor-sorral közelítjük:

$$f(x + dx) \approx f(x) + \left. \frac{df}{dx} \right|_x dx + \frac{\left. d^2 f \right|_x}{dx^2} \frac{dx^2}{2!}$$

$$f(x - dx) \approx f(x) + \left. \frac{df}{dx} \right|_x (-dx) + \frac{\left. d^2 f \right|_x}{dx^2} \frac{(-dx)^2}{2!}$$

Véges differenciák módszere II.

Az ismeretlen függvénynek csak egyes előirt pontokban felvett értékeit határozzuk meg, közelítően.

Ezen értékekből a differenciálegyenletben szereplő differenciálhányadosokat differenciahányadosokkal közelítjük.

A két egyenlet különbségéből kapjuk az első derivált közelítését:

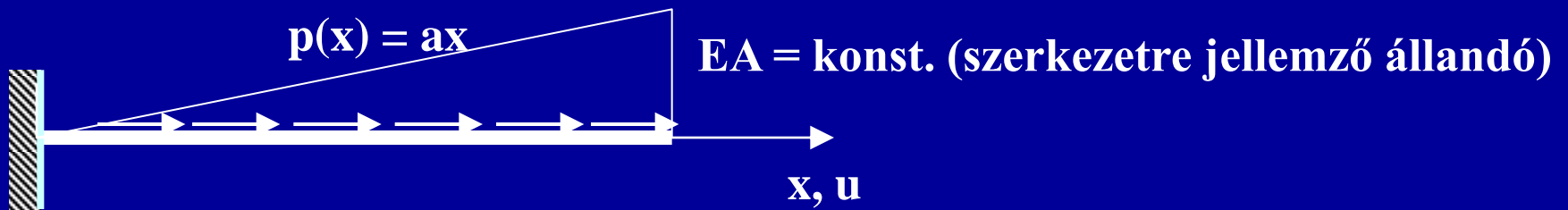
$$\left. \frac{df}{dx} \right|_x = \frac{f(x + dx) - f(x - dx)}{2dx}$$

A két egyenlet összegéből pedig a második derivált közelítését:

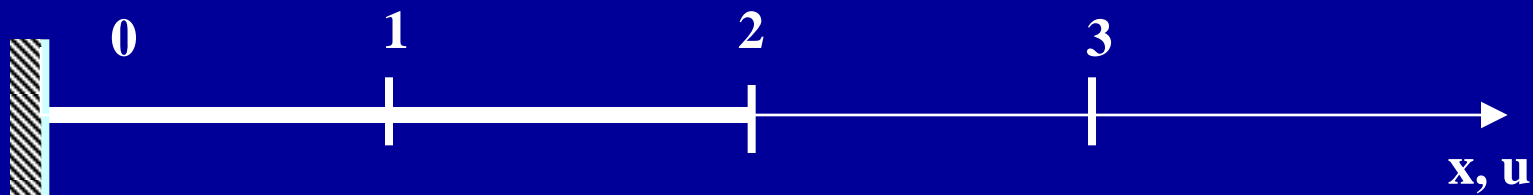
$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_x = \frac{f(x + dx) - 2f(x) + f(x - dx)}{(dx)^2}$$

Véges differenciák módszere II.

Lineárisan változó intenzitású normálerővel terhelt konzol vizsgálata

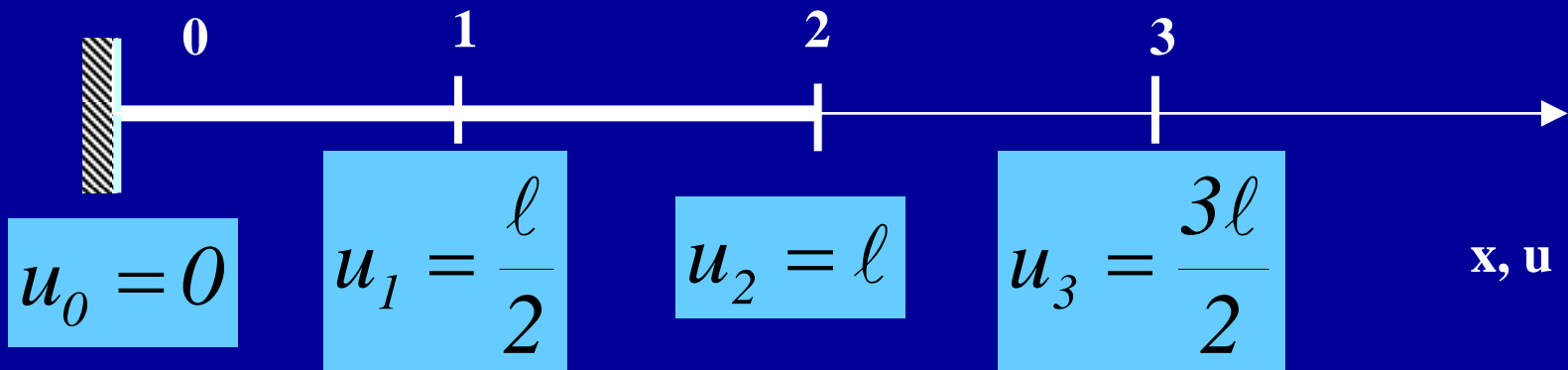


Három valódi és egy fiktív pont felvételével:



Véges differenciák módszere IV.

Lineárisan változó intenzitású normálerővel terhelt konzol vizsgálata



Differenciaegyenlet az 1. pontra felírva: Differenciaegyenlet a 2. pontra felírva:

$$-\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{(l/2)^2} = \frac{a(l/2)}{EA}$$

$$-\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{(l/2)^2} = \frac{al}{EA}$$

Véges differenciák módszere IV.

Lineárisan változó intenzitású normálerővel terhelt konzol vizsgálata

Figyelembe véve a peremfeltételeket az alábbi lineáris egyenletrendszerre és megoldására jutunk:

$$EA \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{al^3}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{al^3}{4EA}$$

$$u_{1,pontos} = \frac{11al^3}{48EA}$$

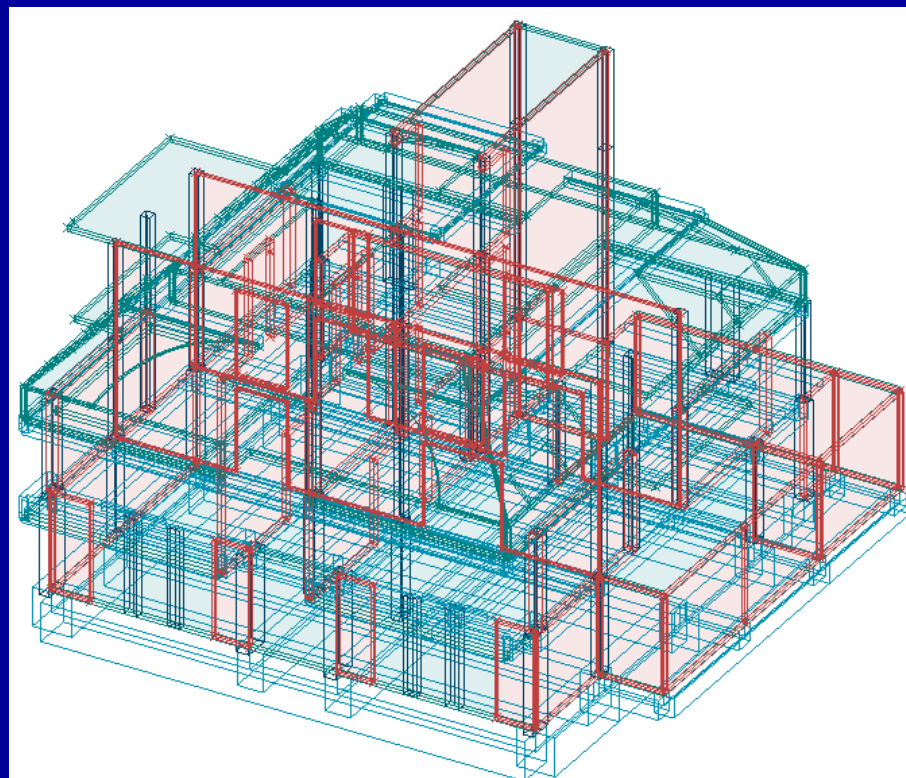
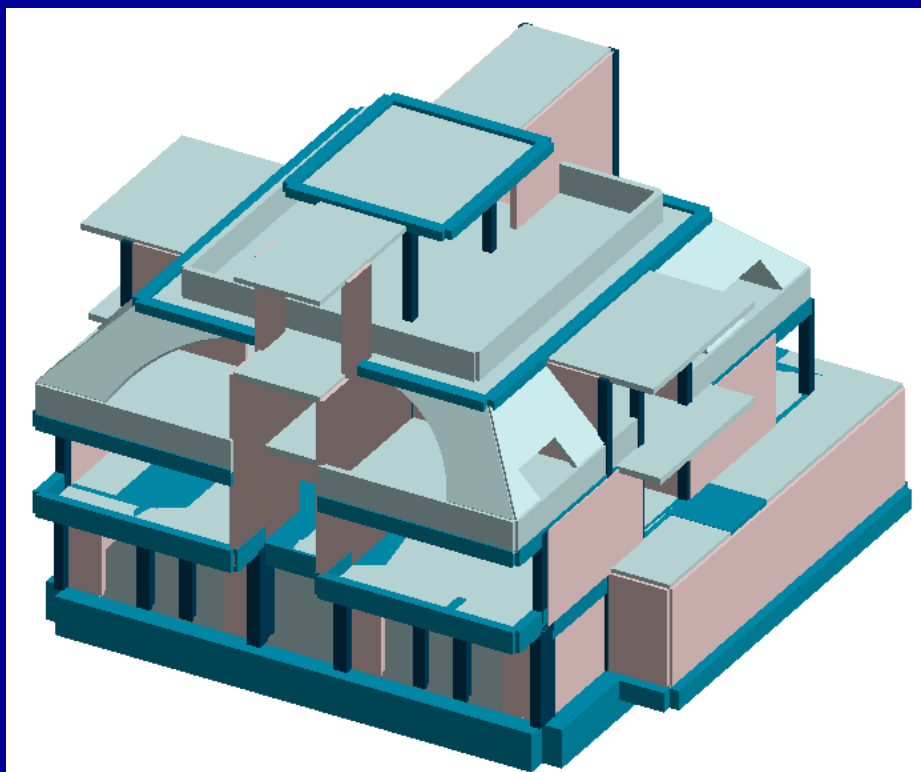
Eltérés: + 9%

$$u_2 = \frac{3al^3}{8EA}$$

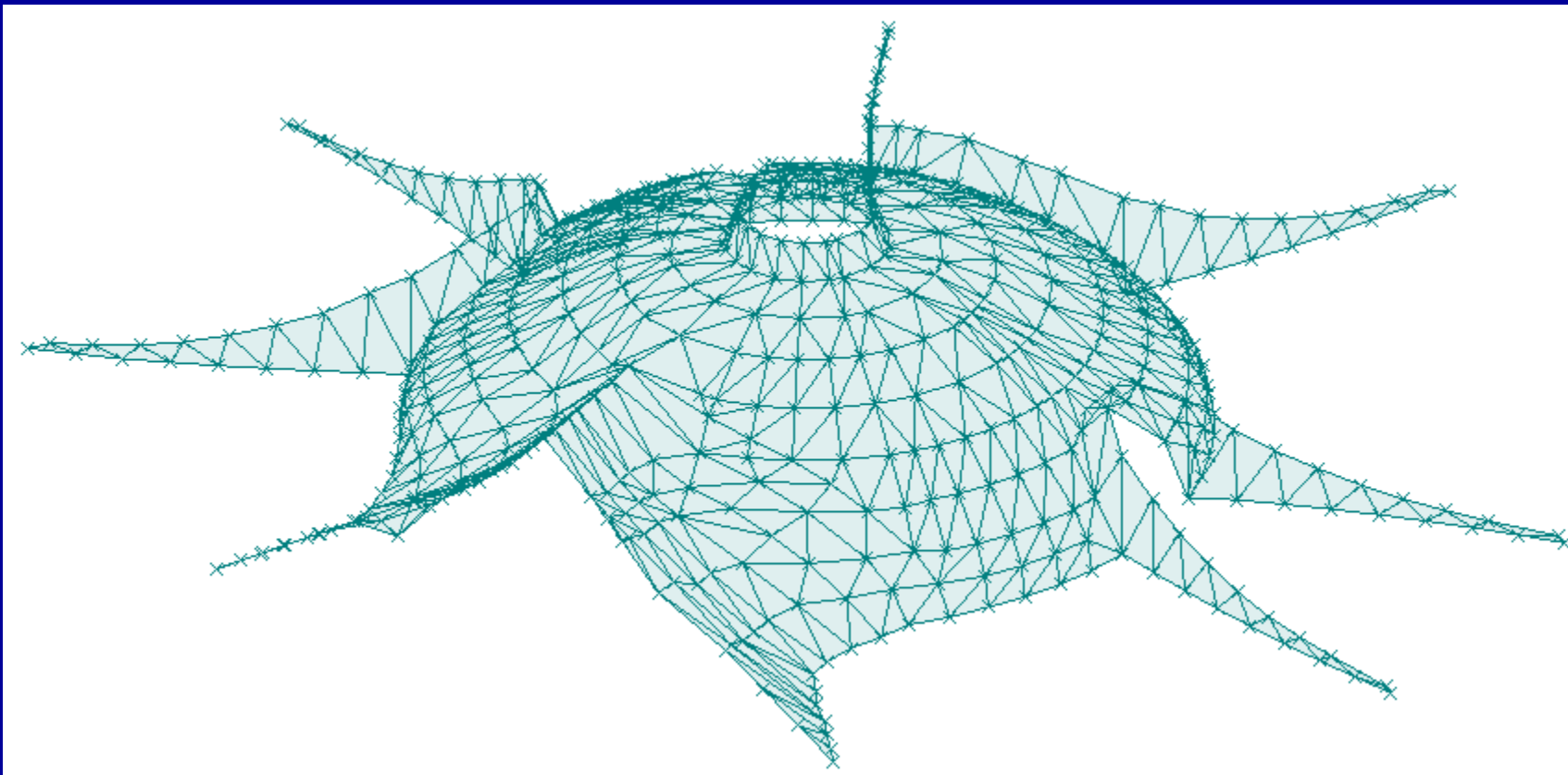
$$u_{2,pontos} = \frac{al^3}{3EA}$$

Eltérés: + 12,5%

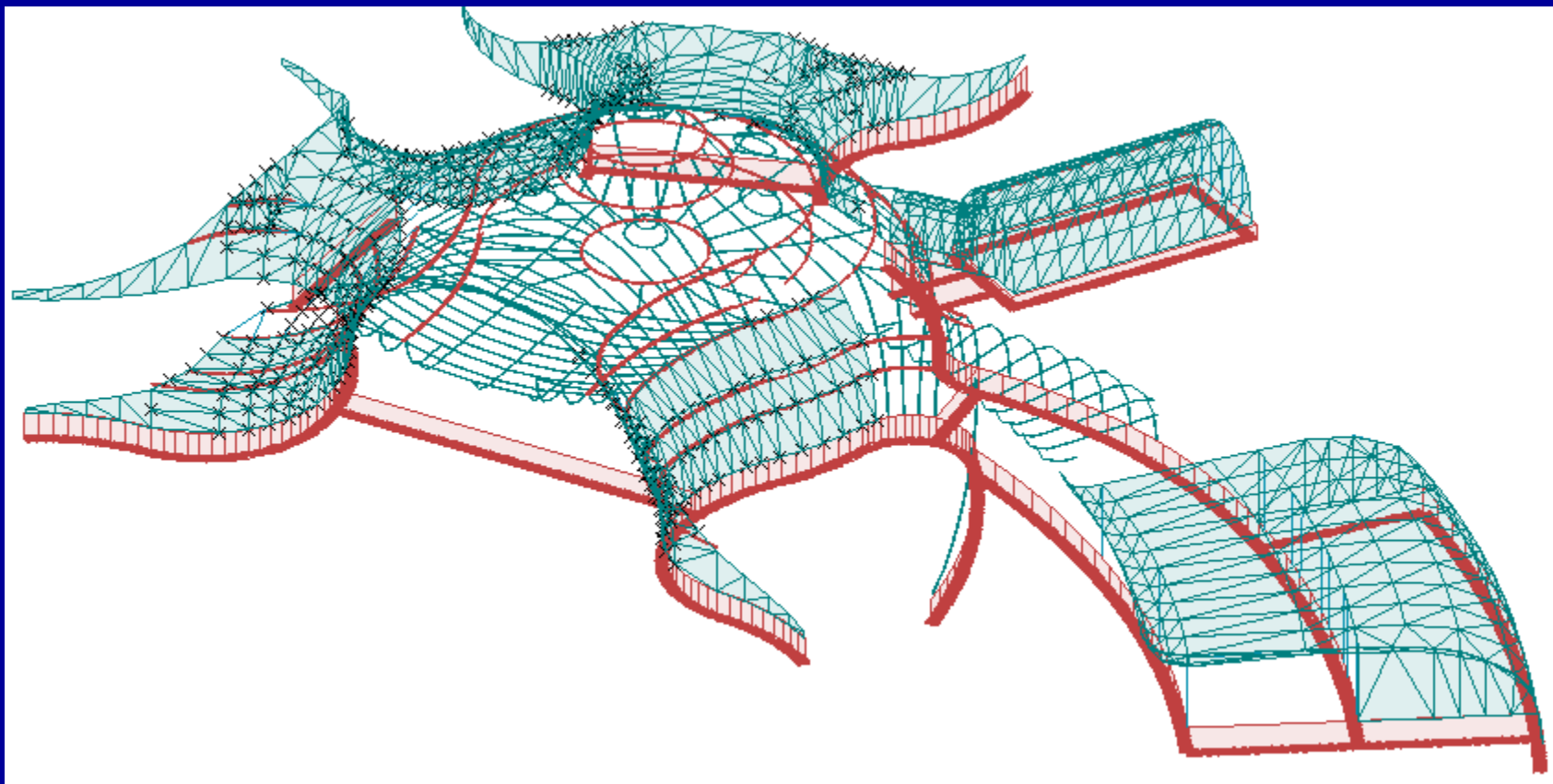
Végeselem módszer gyakorlati alkalmazása I.



Végeselem módszer gyakorlati alkalmazása II.



Végeselem módszer gyakorlati alkalmazása III.



Összefoglalás

- **Modell kísérlet**
- **Mérnöki modellalkotás**
- **Numerikus modellalkotás**
- **Problémamegoldási módszerek és szintek**
 - Differenciálegyenletek**
 - Véges differenciák módszere**
 - Végeselem módszer gyakorlati alkalmazása**
- **Távlati tervek**

Szerkezetek numerikus modellezése az építőmérnöki gyakorlatban

Kovács Imre

*intézetigazgató –helyettes, tanszékvezető, főiskolai docens
a Magyar Építész Kamara tagja, a Magyar Mérnöki Kamara tagja
a *fib* Nemzetközi Betonszövetség Magyar Tagozatának tagja
az Építéstudományi Egyesület Debreceni Csoportjának titkára*