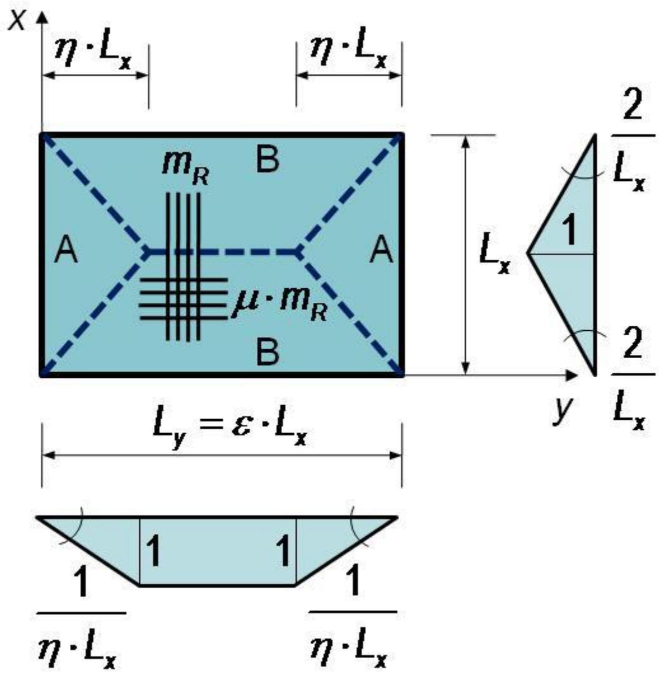
Debreceni Egyetem Műszaki Kar Építőmérnöki Tanszék

2011.

Vasbetonszerkezetek

Kétirányban teherviselő lemez törőterhe

- Segédlet -



Dr. Kovács Imre

tanszékvezető

főiskolai tanár

Vasbetonszerkezetek

Kétirányban teherviselő lemez törőterhe
- Segédlet -

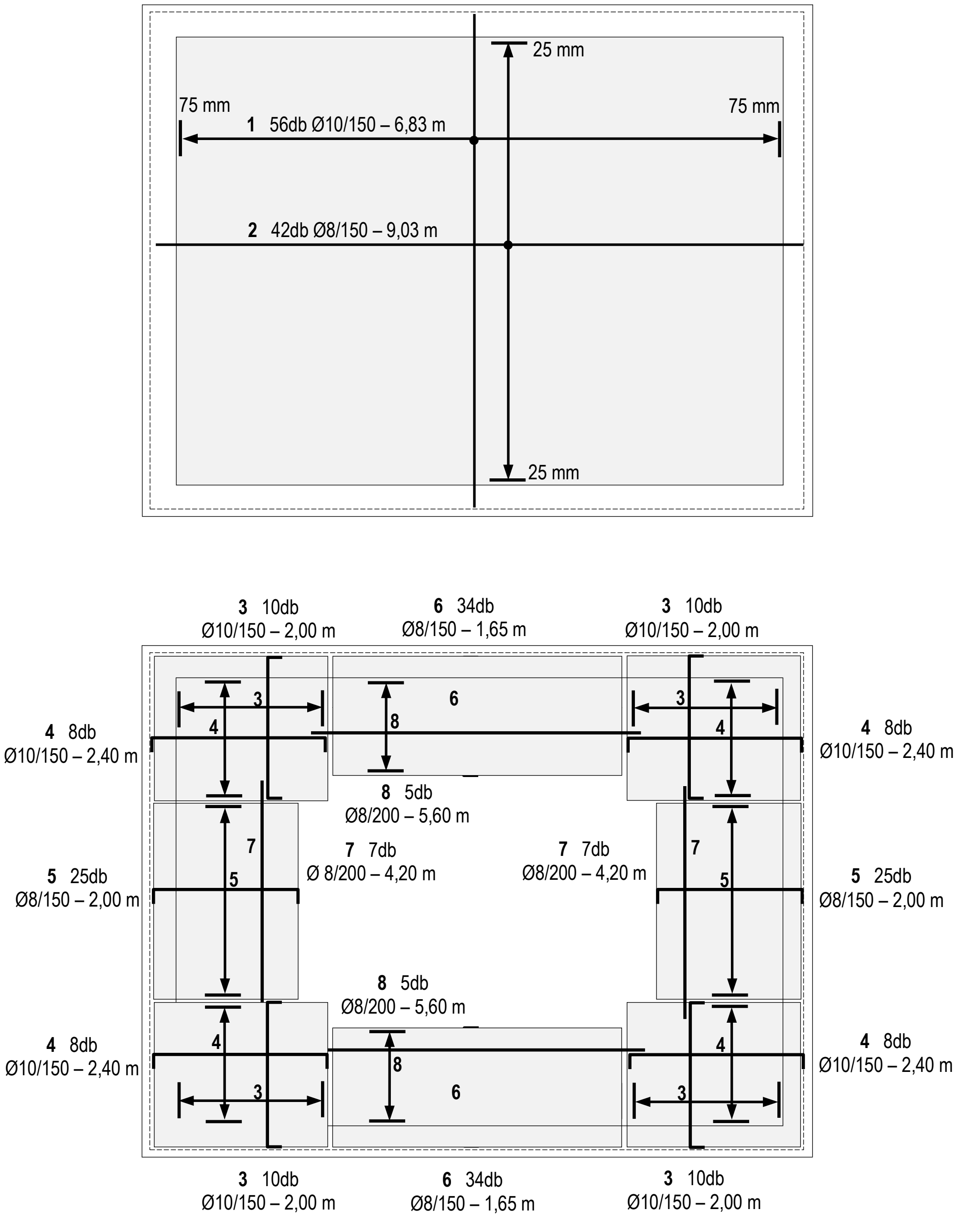
Dr. Kovács Imre
tanszékvezető
főiskolai tanár

Tartalomjegyzék

1.0 Kiindulási adatok 7
2.0 Törőteher számítása a törésvonalak helyzetének pontos meghatározása alapján 8
3.0 Törőteher számítása a törésvonalak helyzetének közelítő felvétele alapján 12

1.0 Kiindulási adatok

A korábban megtervezett kétirányban teherviselő lemez vasalási vázlatát az ***1. ábra*** foglalja össze.



1. ábra: *A kétirányban teherviselő lemez vasalási vázlata*

A lemez kétirányban teherviselő, peremein szabadon elforduló – csuklós – peremű. A peremeken és a sarkokban elhelyezett vasalás a lemezperemek befeszüléséből származó negatív parazita nyomatékok, valamint a felemelkedésében gátolt lemezsarkok környezetében ébredő csavarónyomatékok felvételére szolgál. A lemez törésvonalai a lemez geometriájából, a statikai vázból, valamint a lemez egyenletesen megoszló terheléséből adódóan pozitív törésvonalak lesznek, azaz a lemez alsó síkján megnyíló repedések folyamatos növekedése vezet az alsó hálót alkotó acélbetétek lokális megfolyásához azaz a képlékeny csuklósorok kialakulásához.

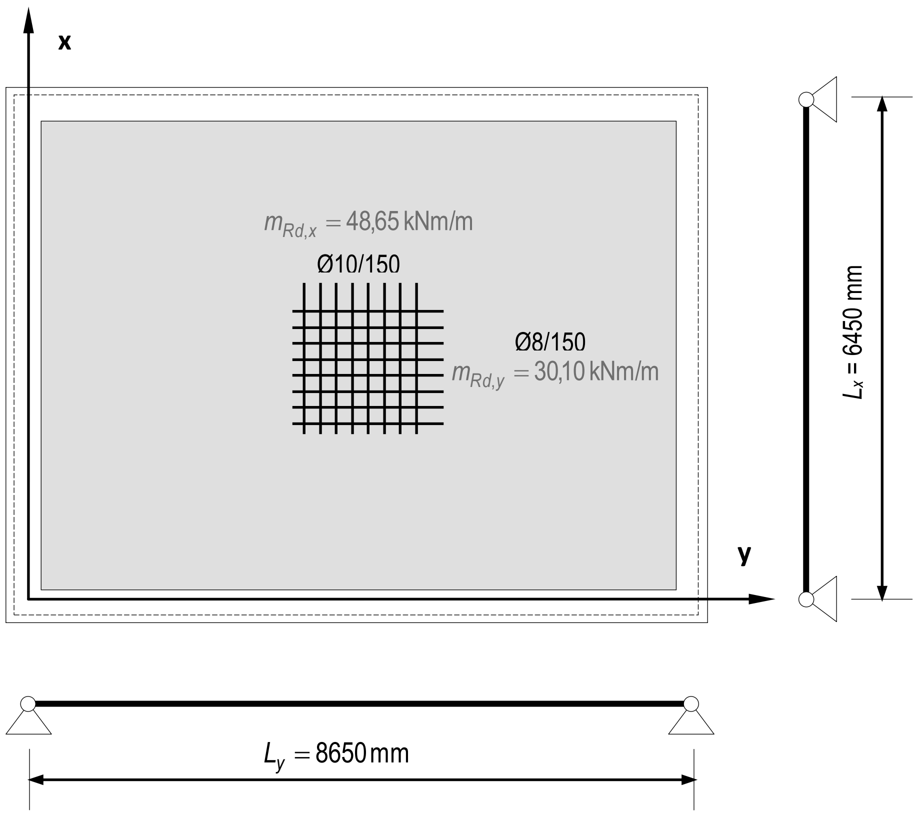
A vasbeton lemez x és y irányban értelmezhető törőnyomatékai megegyeznek az **x** és **y** irányban számított teherbíráshoz tartozó nyomatékok tervezési értékeivel:

$$m_{R,x} = m_{Rd,x} = 48{,}65\,\text{kNm/m} \qquad m_{R,y} = m_{Rd,y} = 30{,}10\,\text{kNm/m}$$

A továbbiakban tekintsük a nagyobbik igénybevételt a törőnyomaték értékének:

$$m_R = m_{R,x} = 48{,}65\,\text{kNm/m} \qquad m_{R,y} = 0{,}619 \cdot m_R = 30{,}10\,\text{kNm/m}$$

Tekintettel a lemez peremfeltételeire és a statikai vázból adódó törésvonalképére, a törőteher meghatározása során a peremeken elhelyezett negatív hajlítónyomatékok felvételére valamint a sarkok környezetében a csavarónyomatékok felvételére tervezett vasalás hatását nem vesszük figyelembe.



2. ábra: *A kétirányban teherviselő lemez statikai váza és törőnyomatékai*

2.0 Törőteher számítása a törésvonalak helyzetének pontos meghatározása alapján

A törőteher meghatározása a kinematikai tétel alkalmazásával történik, mely szerint a szerkezet bármely **kinematikailag lehetséges** képlékeny alakváltozás- és elmozdulás-növekmény eloszlásaihoz tartozó kinematikailag lehetséges teherintenzitás (m_k) nem lehet nagyobb a törőintenzitásnál (m_R). A kinematikai módszer az egyensúlyi és a mechanizmus kialakulására vonatkozó feltételek kielégítésén alapul. Egyszerűen fogalmazva a kinematikai tétel azt fejezi ki, hogy valamely szerkezet törőterhe a kinematikailag lehetséges terhek közül a legkisebb. Kinematikailag lehetséges az a teher, amely valamely törési-, folyási mechanizmuson – a képlékeny csuklók megjelenésével labilissá váló alakzaton – a terhelés növelése nélkül nagy alakváltozásokat okoz. A kinematikailag lehetséges teher mindig nagyobb vagy legalább egyenlő a törőteherrel:

$$p_K \geq p_R$$

Lemezszerkezetek törőterhének meghatározása során a törési-, folyási mechanizmusra, azaz a képlékeny csuklósorok megjelenésével labilissá váló alakzatra – másként a pozitív és negatív trésvonalak felvételére – az alábbi általános szabályok vonatkoznak:

- A vonalmenti támaszok a merevtestszerűen elforduló lemezszakaszok forgástengelyei.
- Pontszerű támaszok esetén egy elfordulási tengely átmegy az adott támaszon.
- A törésvonalak egyenesek.
- Két merevtestszerűen elforduló lemezszakasz közös törésvonala átmegy a lemezszakaszok elfordulási tengelyeinek metszéspontján.
- A törésvonalak a lemez szabad peremein véget érnek.
- Koncentrált erő alatti pozitív törésvonalak átmennek az erő támadáspontján.

A lemez törőterhének pontos meghatározásához a lemez mechanizmussá alakulását eredményező törésvonalak helyzetének pontos ismerete szükséges. Tekintettel a szimmetria viszonyokra, a lemez pozitív törésvonalai két-két A és B jelű lemezszakaszra osztják a peremein csuklós, két irányban teherviselő lemezt (***3. ábra***). A geometriai és teherbírási viszonyok lehetőséget adnak a törésvonalak helyzetét egyértelműen meghatározó η, a lemez oldalainak arányát jellemző ε, továbbá a kétirányú törőnyomatékok arányát megadó μ paraméterek bevezetésére, (***3. ábra***). A ***3. ábrán*** vázolt kinematikailag lehetséges folyási-, törési mechanizmus kialakulását eredményező törőteher meghatározásához – a kinematikai tétel alapján – a mechanizmussá vált szerkezeten végzett külső és belső idegen munkák egyenlőségét használjuk fel:

$$L_{külső} = L_{belső}$$

Fenti kifejezés esetünkben azt jelenti, hogy a merevtestszerűen viselkedő lemezszakaszok elmozdulásain a terhek által végzett külső idegen munka egyenlő a merevtestszerűen viselkedő lemezszakaszok elfordulásain a képlékeny csuklósorokban ébredő törőnyomatékok által végzett belső idegen munkával:

$$\sum_{i=1}^{Lemezszakaszok} N_i \cdot w_i = \sum_{j=1}^{Törésvonalak} m_j \cdot l_j \cdot \varphi_j$$

A ***3. ábra*** alapján a külső idegen munka az egységnyi eltolódáshoz tartozó, mechanizmussá vált szerkezet alakja és annak eredeti síkja által meghatározott térfogat és a törőteher szorzataként írható fel:

$$L_{külső} = \sum_{i=1}^{Lemezszakaszok} N_i \cdot w_i = \left\{ \left[(\varepsilon \cdot L_x - 2 \cdot \eta \cdot L_x) \cdot L_x \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right] + \left[2 \cdot \eta \cdot L_x \cdot L_x \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \right] \right\} \cdot p_R$$

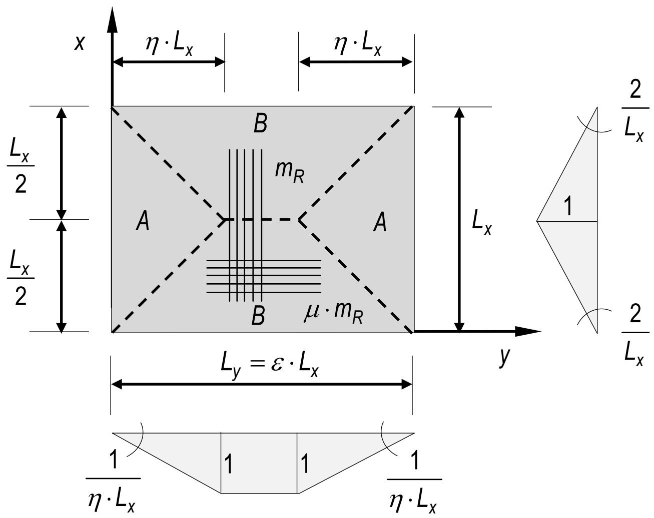
$$L_{külső} = \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot L_x{}^2 - \eta \cdot L_x{}^2 \right) \right] + \left[\frac{2}{3} \cdot \eta \cdot L_x{}^2 \right] \right\} \cdot p_R$$

$$L_{külső} = \frac{1}{6} \cdot p_R \cdot L_x{}^2 \cdot (3 \cdot \varepsilon - 2 \cdot \eta)$$

Fenti eredmény általánosnak tekinthető az egyenletesen megoszló terhelésű, négy oldalán csuklós peremű lemezek esetére. A ***3. ábra*** alapján a belső idegen munka az egységnyi eltolódáshoz tartozó, mechanizmussá vált szerkezet elfordulásain a képlékeny csuklósorokban ébredő törőnyomatékok által végzett munkaként fogalmazható meg:

$$L_{belső} = \sum_{j=1}^{Törésvonalak} m_j \cdot l_j \cdot \varphi_j = 2 \cdot \left(\varepsilon \cdot L_x \cdot m_R \cdot \frac{2}{L_x} \right) + 2 \cdot \left(L_x \cdot \mu \cdot m_R \cdot \frac{1}{\eta \cdot L_x} \right)$$

$$L_{belső} = m_R \cdot \left(2 \cdot \frac{\mu}{\eta} + 4 \cdot \varepsilon \right)$$



3. ábra: *A kétirányban teherviselő lemez pontos törőterhéhez tartozó törésvonalkép felvétele*

Hasonlóan a külső munka számításánál kapott eredményhez, a fenti összefüggés általánosnak tekinthető az egyenletesen megoszló terhelésű, négy oldalán csuklós peremű lemezek esetére. A külső és belső idegen munkák egyenlőségéből:

$$L_{külső} = L_{belső}$$

$$\frac{1}{6} \cdot p_R \cdot L_x^{2} \cdot [3 \cdot \varepsilon - 2 \cdot \eta] = m_R \cdot \left[2 \cdot \frac{\mu}{\eta} + 4 \cdot \varepsilon \right]$$

a törőteher függvénye kifejezhető:

$$p_R(\eta) = 12 \cdot m_R \cdot \frac{1}{L_x^{2}} \cdot \frac{\mu + 2 \cdot \varepsilon \cdot \eta}{[3 \cdot \varepsilon - 2 \cdot \eta] \cdot \eta}$$

A kinematikai tétel alapján egy kinematikailag lehetséges teher mindig nagyobb, vagy legalább egyenlő a törőteherrel. A törőteher-függvény szélső értéke tehát a kinematikailag lehetséges terhek szélső értékét, azaz a törőterhet adja. p_R törőteher η függvénye, így **minimális** értéke az alábbi feltétel mellett nyerhető:

$$\frac{dp_R(\eta)}{d\eta} = 12 \cdot m_R \cdot \frac{1}{L_x^{2}} \cdot \frac{d}{d\eta} \cdot \left[\frac{\mu + 2 \cdot \varepsilon \cdot \eta}{3 \cdot \varepsilon \cdot \eta - 2 \cdot \eta^{2}} \right] = 0$$

Tekintettel arra, hogy m_R és L_x értékei valós konstansok, matematikailag elegendő az alábbi feltétel vizsgálata:

$$\frac{d}{d\eta} \cdot \left[\frac{\mu + 2 \cdot \varepsilon \cdot \eta}{3 \cdot \varepsilon \cdot \eta - 2 \cdot \eta^{2}} \right] = 0$$

$$\frac{d}{d\eta} \cdot \left[\frac{\mu + 2 \cdot \varepsilon \cdot \eta}{3 \cdot \varepsilon \cdot \eta - 2 \cdot \eta^{2}} \right] = \frac{2 \cdot \varepsilon \cdot \left(3 \cdot \varepsilon \cdot \eta - 2 \cdot \eta^{2}\right) - (3 \cdot \varepsilon - 4 \cdot \eta) \cdot (\mu + 2 \cdot \varepsilon \cdot \eta)}{\left[3 \cdot \varepsilon \cdot \eta - 2 \cdot \eta^{2}\right]^{2}} = 0$$

$$\frac{d}{d\eta} \cdot \left[\frac{\mu + 2 \cdot \varepsilon \cdot \eta}{3 \cdot \varepsilon \cdot \eta - 2 \cdot \eta^{2}} \right] \rightarrow \frac{4\varepsilon\eta^{2} + 4\mu\eta - 3\varepsilon\mu}{\left[3 \cdot \varepsilon \cdot \eta - 2 \cdot \eta^{2}\right]^{2}} = 0$$

A kifejezés zérus értékét a számlálóban szereplő függvény zérus értékének meghatározásával nyerjük, mely egy másodfokú egyenlet megoldását igényli, de:

$$3 \cdot \varepsilon \cdot \eta - 2 \cdot \eta^2 \neq 0$$

$$4\varepsilon\eta^2 + 4\mu\eta - 3\varepsilon\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \eta^2 + \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \eta - \frac{3}{4} \cdot \mu = 0$$

Alkalmazzuk a másodfokú egyenlet megoldó képletét:

$$\eta_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-\frac{\mu}{\varepsilon} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\varepsilon^2} + 3 \cdot \mu}}{2} = -\frac{\mu}{2 \cdot \varepsilon} \pm \frac{\mu}{2 \cdot \varepsilon} \cdot \sqrt{1 + \frac{3 \cdot \varepsilon^2}{\mu}} = \pm \frac{\mu}{2 \cdot \varepsilon} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{3 \cdot \varepsilon^2}{\mu}} - 1 \right]$$

A geometriai és teherbírási paraméterek meghatározásával a törésvonalak helyzetét jellemző η paraméter tényleges értéke feladatunkban is kiszámítható:

$$\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} = \frac{8650}{6450} = 1{,}341$$

$$\mu = \frac{m_{R,y}}{m_{R,x}} = \frac{30{,}10}{48{,}65} = 0619$$

$$\eta = \frac{\mu}{2 \cdot \varepsilon} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{3 \cdot \varepsilon^2}{\mu}} - 1 \right] = \frac{0{,}619}{2 \cdot 1{,}341} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{3 \cdot 1{,}341^2}{0{,}619}} - 1 \right] = 0{,}489$$

η ismeretében a törőteher értéke:

$$p_R(\eta) = 12 \cdot m_R \cdot \frac{1}{L_x^2} \cdot \frac{\mu + 2 \cdot \varepsilon \cdot \eta}{[3 \cdot \varepsilon - 2 \cdot \eta] \cdot \eta}$$

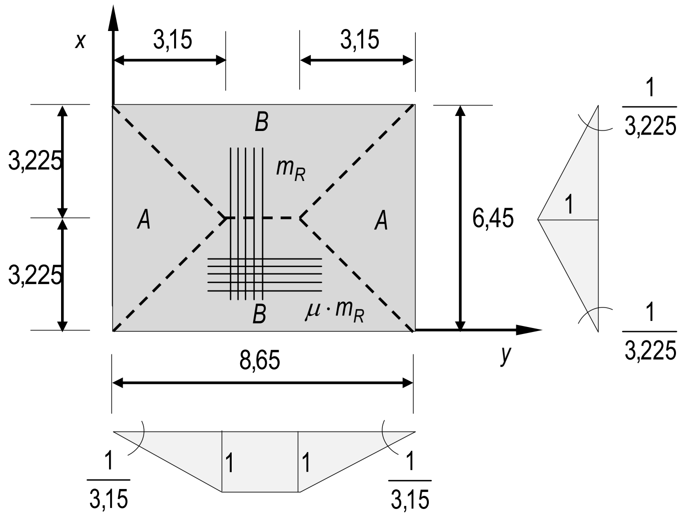
$$p_R(\eta = 0{,}489) = 12 \cdot 48{,}65 \cdot \frac{1}{6{,}45^2} \cdot \frac{0{,}489 + 2 \cdot 1{,}341 \cdot 0{,}489}{[3 \cdot 1{,}341 - 2 \cdot 0{,}619] \cdot 0{,}489} = 18{,}05\,\text{kN/m}^2$$

A szerkezet méretezése során figyelembe vett teher tervezési értékét összehasonlítva a szerkezet teljes mechanizmussá válásához szükséges teher – azaz a törőteher – értékével kimutathatjuk a szerkezet töréssel szembeni biztonságát, ill. tartalékát. Eredményeinket a ***4. ábra*** foglalja össze.

$$p_{Ed} = 16{,}80\ \text{kN/m}^2 < p_R = 18{,}05\,\text{kN/m}^2$$

$$\frac{p_{Ed}}{p_R} = \frac{16{,}80}{18{,}05} = 0{,}93 < 1$$

Tehát a lemez törési biztonsága megfelelő!



4. ábra: *A kétirányban teherviselő lemez pontos törőterhéhez tartozó törésvonalkép*

3.0 Törőteher számítása a törésvonalak helyzetének közelítő felvétele alapján

A törőteher közelítő meghatározása esetén a törésvonalak helyzetét egy, a törésvonalak felvételére vonatkozó szabályoknak megfelelő, általunk felvett kinematikailag lehetséges mechanizmuson vizsgáljuk. Feladatunkban feltételezzük, hogy a törésvonalak a lemez sarkaiból 45^0-os szögben indulnak ki, így a törésvonalak helyzete az ***5. ábra*** szerint geometriailag egyértelműen meghatározott. A külső és belső idegen munkákat, továbbá az ezek egyenlősége alapján kifejezhető törőteher függvény általános alakját már az előző fejezetben meghatároztuk. Tekintettel arra, hogy feladatunk ebben a részében – a már felvett törésvonalkép miatt – nincs szükségünk a törőteher függvény szélsőértékének megkeresésére, a felvett törésvonalképhez tartozó törőteher értéke a már ismert összefüggés alapján számítható:

$$p_R(\eta) = 12 \cdot m_R \cdot \frac{1}{L_x^2} \cdot \frac{\mu + 2 \cdot \varepsilon \cdot \eta}{[3 \cdot \varepsilon - 2 \cdot \eta] \cdot \eta}$$

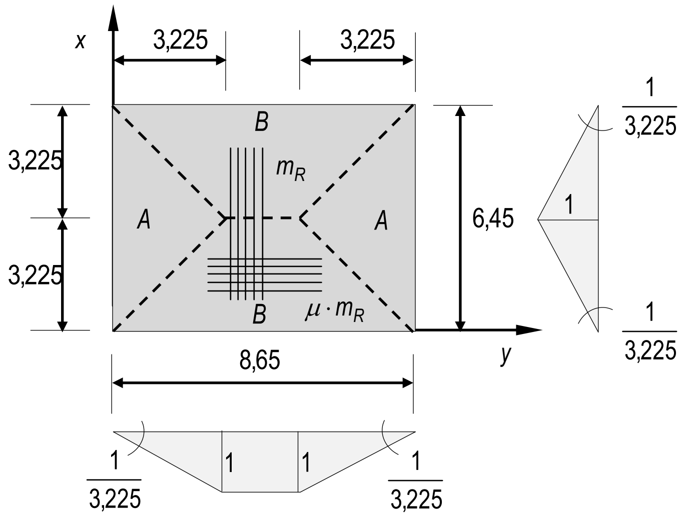
$$p_R(\eta = 0{,}5) = 12 \cdot 48{,}65 \cdot \frac{1}{6{,}45^2} \cdot \frac{0{,}619 + 2 \cdot 1{,}341 \cdot 0{,}5}{[3 \cdot 1{,}341 - 2 \cdot 0{,}5] \cdot 0{,}5} = 18{,}20 \text{ kN/m}^2$$

Megállapíthatjuk, hogy a pontos és közelítő törésvonalképekhez tartozó törőterhek között mérnöki szempontból számottevő különbség nincs:

$$p_{Ed} = 16{,}80 \text{ kN/m}^2 < p_R = 18{,}20 \text{ kN/m}^2$$

$$\frac{p_{Ed}}{p_R} = \frac{16{,}80}{18{,}20} = 0{,}92 < 1$$

Tehát a lemez törési biztonsága megfelelő!



***5. ábra:** A kétirányban teherviselő lemez törőterhének közelítő értékéhez tartozó törésvonalkép*

JEGYZET: